Prolongement de la fonction Γ

Leçon : 235, 236, 239, 245, 265, 241.

Réf : QQ, ZQ

Définition

Pour $x>0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Proposition

1) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

2) Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \neq 0\}$.

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z+1) = \Gamma(z) z$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

Théorème

Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples aux entiers $-n$, $n \in \mathbb{N}$, de résidu $(-1)^n/n!$. De plus, $1/\Gamma$ est une fonction entière et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Preuve

1) Extension de $\mathbb{R}_+^*$ à Ω

2) Extension de Ω à $\mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$, calcul des résidus.

3) Formule de Weierstrass.

1) Extension de $\mathbb{R}_+^*$ à Ω

a) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

classique

b) $\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega)$

On pose $f : \Omega \times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$, $(z,t) \mapsto t^{z-1} e^{-t}$. Pour $t>0$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω et pour $z \in \Omega$, $t \mapsto t^{z-1} e^{-t} = f(z,t) \in L^1_t(]0,+\infty[)$.

Soit $K \subset \Omega$ compact.

Alors il existe $m, n > 0$ tq $\forall z \in K$, $\mathrm{Re}(z) \in [m, n]$. Ainsi, pour tout $z \in K$,

$$|f(z,t)| = |t^{z-1} e^{-t}|$$

$$= |e^{-t}\, e^{(z-1)\log t}|$$

$$\leq \begin{cases} e^{(m-1)\log t} = \dfrac{1}{t^{1-m}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t}\, t^{(n-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\in L^1_t(]0, +\infty[)$$

Donc Γ est holomorphe sur Ω.

2) Prolongement à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

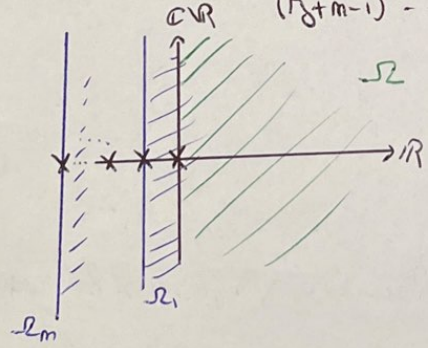
On remarque $\forall z \in \Omega$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.

Si $\mathrm{Re}\, z > -1$, alors $\Gamma(z+1)$ est bien défini. Pour $\mathrm{Re}\, z > -1$, on pose alors $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, car $z \neq 0$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\Omega_m = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > -m\} \setminus \{0, \dots, -m+1\}$.

On définit comme Γ de proche en proche par :

$$\forall z \in \Omega_m,\quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdots(z+1)z}$$



Si $m > n$, alors les deux prolongements coïncident bien (ils sont égaux sur Ω).

On peut donc prolonger Γ de Ω à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, de manière holomorphe.

Soit $m \in \mathbb{N}$, et $z \in \Omega_m$. Alors

$$(z+m)\Gamma(z) = (z+m)\frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdots(z+1)z}$$

$$\underset{z\to -m}{\sim} \frac{(-1)^m}{m!}$$

car $\underbrace{\Gamma(x+1)}_{\sim \Gamma(1) = 1} = x\Gamma(x)$

$\Rightarrow \Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

Donc Γ a des pôles simples aux $-m$, $m \in \mathbb{N}$, et

$\mathrm{Res}(\Gamma, -m) = (-1)^m/m!$

3) Formule de Weierstrass

On n'a pas bcp d'informations sur Γ, on va essayer d'en avoir un peu plus, en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$, on pose $\Gamma_m(z) = \int_0^m t^{z-1}(1-t/m)^m dt$.

$$= \int_0^{+\infty} f_m(t,z)\,dt,$$

où $f_m(t,z) = t^{z-1}(1-t/m)^m \mathbb{1}_{[0,m]}(t)$.

Γ_m est une approximation de Γ, car :

- $|f_m(t,z)| = t^{x-1}|(1-t/m)^m|\mathbb{1}_{[0,m]}(t)$ (si $z = x+iy$)

$$\leq t^{x-1}(e^{-t/m})^m \quad \text{car } 1-u \leq e^{-u},\ u \in [0,1]$$

$$= t^{x-1}e^{-t} \in L^1_p(]0,+\infty[)$$

- $f_m(t,z) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} t^{z-1}e^{-t}$.

Donc par le TCVD, $\Gamma_m(z) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(z)$, $\forall z \in \Omega$.

On va chercher une autre expression de $\Gamma_m(z)$.

On pose $m \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\Gamma_m(z) = \int_0^m t^{z-1}(1-t/m)^m dt \qquad t/m = u$$

$$= \int_0^1 (mu)^{z-1} m^{z-1} (1-u)^m \, m \, du$$

$$= m^z I_m(z), \text{ avec } I_m(z) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^m du.$$

On a $I_m(z) = -(-m)\int_0^1 \frac{u^z}{z}(1-u)^{m-1} du$

$$= \frac{m}{z} I_{m-1}(z+1) = \frac{m(m-1)}{z(z+1)} I_{m-2}(z+2)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+m-1)} I_0(z+m)$$

et $I_0(z+m) = \int_0^1 u^{z+m-1} = \frac{1}{z+m}$, donc $I_m(z) = \frac{m!}{z(z+1)\cdots(z+m)}$

et $\Gamma_m(z) = \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)} \neq 0$. Donc en inversant,

$$\frac{1}{\Gamma_m(z)} = \frac{z(z+1)\cdots(z+m)}{m!} e^{-z\log(m)}$$

$$= \frac{z}{m!}\left(\prod_{k=1}^m (z+k)\right) e^{-z\log(m)}$$

$$= \frac{z}{m!} m! \prod_{k=1}^m (1+z/k)\, e^{-z\log(m)} \qquad e^{-z\log(m)} e^{-z\log(m)} e^{z(-H_m + H_m - \log m)} = e$$

$$= z \prod_{k=1}^m \left[(1+z/k)e^{-z/k}\right] e^{+z(H_m - \log m)}, \text{ avec } H_m = \sum_{k=1}^m 1/k.$$

On pose alors $P(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}(1+z/k)e^{-z/k}$.

→ Développer ?
→ Holomorphe ?

On rappelle le critère d'holomorphie des produits infinis

Théorème Soit $(u_n)=(1+\varepsilon_n)$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble T, tq $\sum \varepsilon_n$ converge normalement CV sur T, i.e. $|\varepsilon_n(t)|\leq \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. Alors, $P_n(t)=\prod_{k=1}^{n} u_k(t)$ CVU sur T vers $P(t)\in\mathbb{C}$, et $t\mapsto P(t)$ est holomorphe si les $t\mapsto u_k(t)$ le sont.

De plus, $P(t_0)=0 \Leftrightarrow \exists k\ u_k(t_0)=0$.

(Preuve en annexe)

Ici, $u_R(z)=1+\varepsilon_R(z)$, avec $\varepsilon_R(z)=(1+z/R)e^{-z/R}-1$.

Donc $\varepsilon_R(z) \underset{R\to+\infty}{=} (1+z/R)(1-z/R+O(z/R^2))-1$

Si $K\subset\Omega$ est compact, alors, pour $z\in K$,

$$\varepsilon_R(z)=1+O_K\left(\frac{1}{R^2}\right)-1=O_K\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

donc $\sum_R \|\varepsilon_R\|_K$ converge.

Ainsi, P est bien définie et est holomorphe sur Ω.

De plus, $H_n-\log n\to\gamma$ la constante d'Euler (cf annexe).

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{R=1}^{\infty}(1+z/R)e^{-z/R}$, $z\in\Omega$.

Or P_n n'a aucun zéro dans Ω, donc on a aussi

$\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(z)=e^{-\gamma z}(P(z))^{-1}\neq 0$. Or $\Gamma_n(z)\to\Gamma(z)$, donc

$\Gamma(z)\neq 0$ pour $z\in\Omega$ et

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{R=1}^{\infty}(1+z/R)e^{-z/R},\quad z\in\Omega.$$

La fonction Γ se prolonge ainsi une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière. □

Annexe

. $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

→ bonne définit° : $\begin{cases} t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}, & x>0. \\ t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right). \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \left|\dfrac{d^k}{dx^k}[t^{x-1}e^{-t}]\right| = |(\log t)^k t^{x-1}e^{-t}|$

$$\leq \begin{cases} |\log t|^k t^{\varepsilon-1} & \text{si } 0<t\leq 1 \\ (\log t)^k t^{n-1}e^{-t} & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$$

(pour $x \in [m,n]$

$\in L^1_t(]0,+\infty[)$

. Preuve du théorème des produits infinis.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \leq e^x$. Donc

$|P_n(t)| \leq e^A$, où $A = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

et $|P_n(t) - P_{n-1}(t)| \leq |P_{n-1}(t)|\,|\varepsilon_n(t)| \leq \alpha_n e^A$. $(P_n = (1+\varepsilon_n)P_{n-1})$.

$\Rightarrow \sum P_n - P_{n-1}$ CVN donc CVU sur T

et donc P_n CVU sur T.

On va exhiber $\varphi \in \mathbb{C}$ tq $P\varphi = 1$; si $\forall j$, $u_j \neq 0$ (en 1 point).

(on abuse de la notation).

On pose $\omega_n = 1 + d_n$, $d_n = \dfrac{-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$, $\varphi = \prod \omega_n$.

Alors $|d_n| \sim |\varepsilon_n|$, donc φ converge bien, et $\varphi_n P_n = 1 \to \varphi P = 1$.

• Série Harmonique et constante d'Euler.

$\gamma = \lim H_n - \ln n \simeq 0,577$. $\gamma \in \mathbb{Q}$? on ne sait pas.

→ on en a donné 600×10^3 décimales.

* $\frac{1}{n} \sim \ln(1+\frac{1}{n})$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

(car $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \not\to 0$).

donc $H_n \sim \sum \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln n$.

* On pose $U_n = H_n - \ln n$.

On a $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{n})^2 + o(\frac{1}{n^2})$

$\sim \frac{-1}{2n^2}$

Donc $\sum U_n - U_{n-1}$ CV, or $\sum U_n - U_{n-1} = \lim_{n \to +\infty} U_n - U_1 =: \gamma - 1$

donc $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ =

* On peut continuer et donner un $\sim$ des restes de $\sum U_n - U_{n-1}$.

$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$.